

IREM D'AQUITAINE
GROUPE DIDACTIQUE

TRAVAILLER LES COMPÉTENCES DU SOCLE COMMUN
EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES.

Quelques exemples pour mieux comprendre ce qu'est une compétence.

« Une compétence permet de faire face à une situation complexe, de construire une réponse adaptée sans la puiser dans un répertoire de réponses préprogrammées. » (P.Perrenoud)

« Elle repose donc sur la mobilisation, l'intégration, la mise en réseau d'une diversité de ressources dans une situation donnée, dans le but d'agir. » (rapport IGEN – juin 2007)

Exemples de consignes et analyse de ces consignes en termes de compétence

A. Savoir exécuter une opération en réponse à un signal (identifiables sans difficulté : question, consigne, situation connue)

- **Niveau 1**
Savoir restituer des connaissances

Exemple : Dans cette opération comment appelle-t-on le nombre 262 ?

$$\begin{array}{r|l} 262 & 19 \\ 15 & 13 \end{array}$$

Il faut connaître le vocabulaire.

- **Niveau 2**
Savoir-faire de base : applications directes (activités qui consistent à appliquer la démarche apprise – algorithme, règle, succession d'étapes – exprimée dans la consigne. L'élève sait ce qu'il doit mobiliser)

Exemple : Effectuer la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 262 & 19 \\ & \end{array}$$

Il faut connaître la technique de la division et savoir l'appliquer.

- **Niveau 3**
Savoir-faire de base : applications « habillées » (la ressource à mobiliser est exprimée dans la consigne, des données non nécessaires et une situation sont ajoutées pour l'habiller) Il s'agit d'appliquer dans une situation une démarche apprise et exprimée dans la consigne.

Exemple : J'ai 362 billes et je veux les partager équitablement entre 19 enfants. Combien chaque enfant aura-t-il de billes ?

Le vocabulaire « partager équitablement » évoque de manière presque immédiate qu'il faut effectuer une division.

B . Posséder une gamme de compétences élémentaires et savoir choisir celle qui convient dans une situation inédite.

• **Niveau 4**

Savoir faire complexe : compétences (analyser la situation et la consigne donnée pour identifier les ressources et les démarches à mobiliser - non exprimées dans la consigne - les combiner de façon adéquate et les mettre en œuvre correctement.)

Exemple : En 6^{ème} D, le professeur de math a 262 bonbons. Il en distribue une partie aux élèves de sa classe. Chaque élève reçoit 13 bonbons et il en reste 15 pour le professeur.
Combien y a-t-il d'élèves en 6^{ème} D ?

Effectuer la division $362 \div 13$ ne donne pas la solution car le reste 15 est supérieur au diviseur 13. Il faut penser à enlever 15 à 262 avant d'effectuer la division par 13.

C. Savoir choisir et combiner correctement plusieurs compétences élémentaires pour traiter une situation nouvelle et complexe.

• **Niveau 5**

Compétences génériques : savoir transférer, avec inférence pour construire une connaissance nouvelle dans un contexte nouveau. Il faut modéliser dans des situations nouvelles à partir de situations antérieures.

Exemple : Aujourd'hui on est lundi. Dans 1262 jours, quel jour sera-t-on ?

La division n'est pas de manière évidente la ressource à mettre en œuvre pour résoudre le problème. Le nombre 7 est à inférer à partir du contexte du problème.

Résumé :

	Démarches	Catégories
Ressources (connaissances et savoir-faire)	Savoir restituer	Connaissance
	Savoir faire de base	Application directe
	Savoir faire de base	Application habillée
Compétences	Savoir faire complexe	Compétence
	Savoir transférer	Compétence générique

Conclusion :

Former un élève à la maîtrise de compétences c'est lui présenter des situations variées et lui faire réaliser des tâches elles aussi variées, tant par leur niveau de difficulté que par leur contexte, pour qu'il puisse en dégager la structure commune, les invariants. Pour résoudre les problèmes qui lui sont posés, il peut utiliser des démarches apprises en classe mais aussi des démarches plus naturelles, issues de sa culture personnelle.

Évaluer une compétence implique de proposer aux élèves des tâches nouvelles (pas encore rencontrées) et complexes, qui demandent d'utiliser à bon escient des savoirs et savoir-faire effectivement appris.

L'objectif du travail par compétences est de rendre nos élèves capables de résoudre des tâches de niveau 4 ou 5. L'évaluation de la maîtrise des techniques doit rester à sa juste place. L'évaluation de micro-connaissances ou de savoir-faire élémentaires dans des exercices purement techniques n'est pas un objectif essentiel.

Dans la suite de ce document, nous présentons deux situations qui permettent le travail des compétences en classe, travail essentiel avant toute validation pour le socle commun.

Travailler des compétences dans des situations complexes.

Un exemple : Redécouvrir la technique de la division de deux entiers.

Cette situation illustre ce que recommande le vade-mecum pour le socle commun dont nous citons quelques extraits ci dessous :

- *La résolution de problèmes a une place importante. Ce n'est pas parce que cette exigence d'acquisition du socle commun concerne des élèves fragiles ou en difficulté en mathématiques que la formation qui leur est dispensée doit se cantonner dans l'apprentissage de techniques ou la mise en application de recettes. La résolution de problèmes est essentielle pour rendre opérationnelles les aptitudes à construire, notamment dans le cadre du socle. Elle occupe donc une place importante dans la formation, comme dans l'évaluation.*
- *Pour gérer la double exigence du programme et du socle commun, il est essentiel de veiller à ce que les problèmes proposés dans ce cadre offrent une vraie activité mathématique à tout élève, y compris à celui qui ne maîtrisera peut-être pas une résolution complète.*
- *Les situations choisies dans ce cadre doivent permettre à tout élève de s'engager avec ses acquis du moment et donc, ne reposer que sur des consignes simples, n'exiger que des connaissances solidement acquises. Chaque élève est ainsi conduit à exercer les aptitudes dont il dispose et à en identifier les limites. La mutualisation des différentes procédures apparues dans la classe permet de présenter dans les meilleures conditions le savoir nouveau visé en lui donnant toutes les chances d'être perçu comme utile voire indispensable. Les élèves sont ainsi en état de le recevoir puis de se l'approprier.*
- *Pour cela, il est nécessaire d'ouvrir les questions posées aux élèves. Ouvrir le questionnement favorise l'activité de chacun en augmentant la palette des stratégies accessibles.*
- *Résoudre un problème, c'est raisonner puis communiquer. Il est possible en classe entière d'animer des débats autour de l'examen de productions individuelles choisies ou de travaux de groupes, chaque élève pouvant dire ce qu'il ne comprend pas, les précisions qui manquent pour que l'écrit soit parfaitement clair.*

Présentation de la situation :

L'objectif est de retrouver comment la technique usuelle de la division se construit à l'aide de la **multiplication et de la soustraction**. Dans ce but, on utilise la résolution d'un problème qui n'est pas reconnu par les élèves de 6^{ème} comme un problème relevant de la division.

Les problèmes reconnus comme relevant d'une division sont des problèmes de partages (calcul du nombre de parts ou de la valeur d'une part) ou des problèmes d'échange (J'échange 10 billes contre 1 bonbon, j'ai 354 billes, combien aurai-je de bonbons ?).

Au lieu de revoir **la technique de la division comme un algorithme imposé, dont la justification a été oubliée, ou jamais comprise**, ce problème permet **aux élèves seuls** de retrouver cette justification.

Ils vont donc être amenés à utiliser des stratégies diverses qui ressemblent aux raisonnements qu'ils avaient faits lorsqu'ils ont découvert la division.

Les élèves travaillent simultanément la technique de la division et le sens.

La division est une notion difficile, pour un certain nombre d'élèves de 6^{ème}, la seule division qui leur est familière est la division par 2. Ils l'emploient de manière systématique, même à mauvais escient. D'autres élèves confondent la division et la soustraction.

Il est fréquent de constater combien le mot division fait peur, au point de bloquer tout apprentissage.

Certains élèves disent : « Moi, les divisions, je n'y ai jamais rien compris, je ne saurai jamais les faire » et ils refusent d'essayer.

La mise en place de la technique, vécue comme difficile par les élèves, a souvent occulté le sens.

Voici le problème sur lequel nous allons travailler :

PROBLEME 1

Voici un tableau où figure un nombre entier dans chaque case. Il s'agit de savoir situer dans quelle colonne et dans quelle ligne se trouve un nombre donné par le professeur.

	C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6
L0	0	1	2	3	4	5	6
L1	7	8	9	10	11	12	13
L2	14	15	16		

Remarques sur l'énoncé du problème pour le professeur :

Nous n'avons pas choisi le tableau ci-contre car si on prend ce tableau, le reste de la division donne bien la colonne, sauf pour les multiples de 7 qui sont dans la 7^{ème} colonne alors que le reste est 0. Mais sur une même ligne, on trouve des nombres correspondants au même quotient, sauf le dernier qui correspond au quotient augmenté de 1. Par exemple : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 correspondent au quotient 0 et 7 au quotient 1.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
L1	1	2	3	4	5	6	7
L2	8	9	10	11	12	13	14
L3	15	16			

Si on numérote les lignes à partir de 1 comme il serait naturel de le faire, le quotient ne donne pas la ligne, il faut ajouter 1. Par exemple : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 correspondent au quotient 0 et se trouvent sur la 1^{ère} ligne, L₁.

Certains élèves ayant eu l'idée d'utiliser la division pour résoudre le problème, trouvaient 49 comme quotient pour 348 et les autres plus nombreux, qui avaient tâtonné, trouvaient 348 sur la ligne L₅₀. La division était donc considérée comme ne donnant pas le bon résultat. Alors que l'objectif du problème est de montrer son efficacité.

Si on prend le tableau qui commence par 0, et qu'on numérote les lignes à partir de 0, la ligne est bien donnée par le quotient. Si des élèves utilisent la division pour résoudre le problème, ils auront donc la bonne réponse.

Le tableau qui commence par 1 donne correctement la colonne par le reste de la division, sauf pour les multiples de 7. Pour le tableau qui commence par 0, la colonne donne bien le reste à condition de numérotter les colonnes à partir de 0 : si le reste est 0, le nombre est dans la première colonne C_0 .

Nous avons donc choisi de proposer le premier tableau, commençant par 0, en numérotant les lignes, $L_0, L_1, L_2, L_3 \dots$ et les colonnes C_0, C_1, C_2, \dots

Démarrage de la situation avec les élèves :

Le professeur présente le tableau vierge aux élèves et remplit quelques lignes devant eux afin qu'ils comprennent qu'il y a un nombre entier par case.

	C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6
L0							
L1							
L2							

Puis il demande aux élèves de situer un nombre déjà marqué dans le tableau afin qu'ils comprennent le système des lignes et colonnes.

a) Dans quelle colonne et dans quelle ligne va t-on trouver le nombre 16 ?

Puis le professeur pose le problème aux élèves, il donne les trois questions ci dessous séparément et fait un court bilan entre chaque.

- 1) Dans quelle colonne et dans quelle ligne va t-on trouver le nombre 75 ?
- 2) Dans quelle colonne et dans quelle ligne va t-on trouver le nombre 348 ?
- 3) Dans quelle colonne et dans quelle ligne va t-on trouver le nombre 1857 ?

Les stratégies des élèves :

Le professeur pose la première question, après un temps de recherche à l'écrit, il fait un bilan partiel sous forme d'une mise en commun avec la classe.

Les élèves présentent au tableau les différentes méthodes qu'ils ont trouvées. Cela évite aux plus faibles de prolonger indéfiniment le tableau, faute d'autres idées.

Certains élèves recherchent d'abord la colonne : ils remarquent que 70 est dans la colonne C_0 .

D'autres malgré la façon dont est formulée la question cherchent d'abord la ligne : ils trouvent 70 dans la ligne L_{10} .

- 1) Le nombre 75 n'a pas été choisi trop grand, pour que certains élèves **continuent le tableau**, jusqu'à placer effectivement 75 dans la ligne L_{10} et la colonne C_5 . Même les plus faibles peuvent démarrer.
- 2) Quelques élèves pensent **qu'il s'agit d'un tableau de proportionnalité** (dès qu'il y a un tableau, c'est un réflexe !¹), ils disent par exemple : 15 est à la ligne L_3 et à la colonne C_1 et comme

¹ Les élèves croient que le professeur attend d'eux un calcul de proportionnalité, chaque fois qu'il y a un tableau . C'est un effet de **contrat didactique** entre professeur et élève.

$75 = 15 \times 5$ donc 75 sera à la ligne L_{15} et à la colonne C_5 . Leur solution est aussitôt démentie par ceux qui ont placé 75 dans le tableau.

- 3) D'autres voient que **pour passer d'une ligne à l'autre, il faut ajouter 7 :**

$$1 + 7 = 8 ; 8 + 7 = 15 ; 15 + 7 = 22 ; 22 + 7 = 29 ; \dots$$

Ils essaient donc d'ajouter 7, pour compléter une des colonnes afin de se rapprocher de 75.

Ce procédé n'est pas très long pour 75, mais devient presque impossible à réaliser pour 348.

	C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6
L0	0	1	2	3	4	5	6
L1	7	8	9	10	11	12	13
L2	14	15	16	17	18		
L3		22					
L4		29					
L5		...					

Le professeur, après avoir observé les élèves au travail, demande à certains, qu'il choisit, d'expliquer au tableau, les méthodes qu'ils ont utilisées pour 75. Cela permettra de relancer l'activité de ceux qui en sont encore à compléter le tableau. L'activité est relancée pour quelques minutes avec 348, afin de laisser le temps à tous d'expérimenter les nouvelles méthodes proposées par les autres. De nouvelles méthodes plus rapides arrivent.

- 4) Certains élèves voient que **la première colonne contient les nombres de la table de 7**, ils peuvent donc compléter facilement cette colonne, au moins jusqu'à 70, ce qui suffit pour placer 75. Pour 348, ça se complique, car alors les multiples de 7 ne sont pas connus, il faut les calculer. On voit de nombreuses erreurs de calcul.
- 5) Pour aller plus vite, pour 348, certains élèves pensent à **ajouter 14 ou 35 ou 70 pour sauter plusieurs lignes à la fois**, en prenant modèle sur le procédé 3.
- 6) Finalement, certains pensent à **se rapprocher de 348 par des multiples de 7** : le nombre obtenu se trouvant alors dans la première colonne. Certains font des essais au hasard, avec de nombreuses erreurs d'opération.
- 7) Enfin certains essaient $7 \times 20, \dots$ puis $7 \times 50 = 350$
Il suffit alors de reculer de 2 cases pour trouver 348, à la ligne L_{49} , et la colonne C_5 .

Une nouvelle mise en commun permet à la classe de prendre connaissance des nouvelles méthodes proposées par des élèves. Les autres vont les essayer pour 1857.

- 8) Pour 1857, le dernier procédé est adopté car considéré comme le plus rapide.
Il faudra encore **l'optimiser en choisissant convenablement les essais à effectuer.**
On essaie 7×100 puis $7 \times 200 = 1400$
Il reste à avancer de $1857 - 1400 = 457$
On essaie alors $7 \times 60 = 420$
Il manque $457 - 420 = 37$
On fait alors $7 \times 5 = 35$
On est arrivé à $1400 + 420 + 35 = 1855$, qui est un multiple de 7 et donc se trouve dans la colonne C_0 . Il suffit d'avancer de 2 cases pour placer 1857 dans la ligne L_{265} et la colonne C_2 .

La taille des nombres choisis, allant croissant, cela oblige les élèves à remettre en cause leurs procédés, pour les rendre plus performants.

Au début tous les élèves, même les plus faibles, peuvent démarrer, ensuite ils peuvent appliquer les procédés trouvés par des élèves plus astucieux.

On voit petit à petit apparaître le lien entre la multiplication et la division et même dans le dernier procédé, on peut voir le rôle de la soustraction et du reste.

Tous et en particulier les plus faibles retravaillent les additions et les multiplications d'entiers, le calcul mental et la table de multiplication par 7; et bien sûr la technique de la division.

Certains élèves finissent par se rendre compte qu'ils auraient pu faire une division pour trouver le résultat. Le professeur demande alors à un élève de poser la division de 1857 par 7 au tableau et on peut faire le parallèle entre les nombres qui apparaissent à gauche de la potence et les calculs que l'on vient de faire.

$$\begin{array}{r|l}
 1857 & 7 \\
 - 14 & \hline
 45 & \\
 - 42 & \\
 \hline
 37 & \\
 - 35 & \\
 \hline
 2 &
 \end{array}
 \quad \text{ou} \quad
 \begin{array}{r|l}
 1857 & 7 \\
 45 & \hline
 37 & \\
 2 &
 \end{array}$$

correspondent à

$$\begin{array}{rcl}
 7 \times 200 & = & 1400 \quad \text{Reste } 457 \\
 7 \times 60 & = & 420 \quad \text{Reste } 37 \\
 7 \times 5 & = & 35 \quad \text{Reste } 2
 \end{array}$$

On retrouve les mêmes nombres.

On peut alors constater que le quotient de la division indique la ligne, 1857 est à la ligne L_{265} et le reste donne la colonne, 1857 est à la colonne C_2 .

Bilan : Diviser 1857 par 7 revient à se rapprocher le plus près possible de 1857 par des multiples de 7.

Le multiple de 7 le plus proche de 1857 est $7 \times 265 = 1855$. Pour atteindre 1857, il faut rajouter 2.

$$\text{On a } 1857 = 7 \times 265 + 2$$

$$\begin{array}{r|l}
 a & b \\
 r & q
 \end{array}
 \quad a = (b \times q) + r \quad \text{avec } r < b$$

On peut proposer ensuite le problème2, qui permet de réinvestir ce que l'on vient de voir. Pourtant beaucoup d'élèves vont recommencer les tâtonnements, ceux qui auront fait la division correctement iront plus vite.

PROBLEME 2

Sur une autre planète, poussent des fleurs géantes. Je cueille une marguerite qui a 6376 pétales et je l'effeuille, en disant pour le premier pétale « je t'aime » puis pour le deuxième « un peu », pour le troisième « beaucoup », pour le quatrième « passionnément », pour le cinquième « à la folie » et pour le sixième « pas du tout ». Au septième pétale, je recommence à « je t'aime ».
Sur quel mot vais-je m'arrêter, lorsque j'aurai effeuillé les 6376 pétales ?

Remarque : On a choisi le nombre 6376, pour avoir un quotient dont un des chiffres est 0.

Il ne faut pas choisir un nombre de pétales trop simple, afin que les élèves qui font la division aillent effectivement plus vite que ceux qui recommencent à tâtonner.

Il suffit de trouver le reste de la division pour savoir sur quel mot on va tomber, le quotient ne joue ici aucun rôle dans la solution.

On peut donc dire : au 6000^{ème} pétale, je suis à « pas du tout », au 6300^{ème} pétale, aussi, ainsi qu'au 6360^{ème} et au 6372^{ème}. Il reste donc 4 pétales à effeuiller, je reprends à « je t'aime », on va donc arriver à « passionnément ». Ou bien faire la division, dont le reste est 4 et le quotient 1062.

Conclusion :

Le même problème est posé à tous, sans travail en groupe ni documents différents selon les élèves. Gérée de cette façon, cette situation est pourtant **un exemple de pédagogie différenciée**. En effet :

- La situation est **ouverte** et gérée de telle façon que tous les élèves peuvent la comprendre, démarrer, progresser en utilisant les idées des autres.
- **Tous les élèves ont fait des mathématiques** à des niveaux de maîtrise différents, même les plus faibles.
- Même si tous n'atteignent pas l'objectif final qui est de savoir poser une division, ils ont **tous un moyen de résoudre un problème relevant d'une division**.

Un autre exemple en géométrie

CERCLE CIRCONSCRIT AU TRIANGLE RECTANGLE

DROITE DES MILIEUX DANS LE TRIANGLE QUELCONQUE

Voici une proposition pour enseigner en 4^{ème} le cercle circonscrit au triangle rectangle puis la droite des milieux dans le triangle quelconque dans cet ordre. La propriété du cercle circonscrit à un triangle rectangle, ou encore « la caractérisation des points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit » n'est pas dans le socle commun, la propriété de la droite des milieux y figure, mais pas sa réciproque. Pourtant les séquences proposées permettent de réinvestir des notions qui, elles, sont dans le socle commun, de la 6^{ème} à la 4^{ème}. Elles permettent aussi de travailler le raisonnement et la notion de démonstration, tout en traitant le programme.

A partir des situations proposées, les élèves de 4^{ème} démontrent eux mêmes, en classe, à l'oral, les propriétés visées, en partant de leurs conjectures et de leurs connaissances. La démonstration est orientée par les propositions des élèves, c'est pourquoi nous donnons plusieurs solutions selon les pistes qui ont été suivies lors d'expérimentations dans différentes classes. Avec cette façon de gérer la classe, certaines propositions peuvent être suggérées, alors que le professeur n'y a pas forcément pensé en préparant son cours. Cela l'oblige donc à réagir instantanément aux propositions des élèves. Le professeur peut laisser les élèves s'engager dans un raisonnement sans qu'ils sachent si celui-ci va aboutir, quitte à revenir en arrière et changer de stratégie ensuite, si la piste se révèle sans intérêt. En cela, le professeur laisse les élèves suivre le processus d'une recherche véritable.

Une fois que les raisonnements corrects ont été trouvés, le professeur fait le point par écrit au tableau sur ce qui a été démontré et le fait noter aux élèves afin qu'ils gardent une trace de ce qui a été trouvé en commun en classe.

Il peut demander aux élèves de rédiger seuls une partie des démonstrations à la maison.

Contrairement à ce qui se fait dans la plupart des manuels, nous traitons d'abord le cercle circonscrit dans le triangle rectangle et ensuite la droite des milieux. Nous avons observé que, pour démontrer le parallélisme entre la droite des milieux et le côté, les élèves proposent souvent de prouver que les deux droites sont perpendiculaires à une même troisième. Pour continuer dans cette voie, il faut tracer la hauteur et utiliser la propriété de la médiane du triangle rectangle. Ceci justifie notre progression.

Ainsi l'observation de nos élèves nous conduit non seulement à choisir l'ordre des questions posées au cours d'une séquence mais aussi à trouver la meilleure progression pour l'année.

A- CERCLE CIRCONSCRIT AU TRIANGLE RECTANGLE

Nous proposons deux progressions possibles .

Progression 1 :

Le professeur fait travailler les élèves sur la figure suivante ainsi codée.

Il leur demande de préciser les données et de faire des conjectures.

Données :

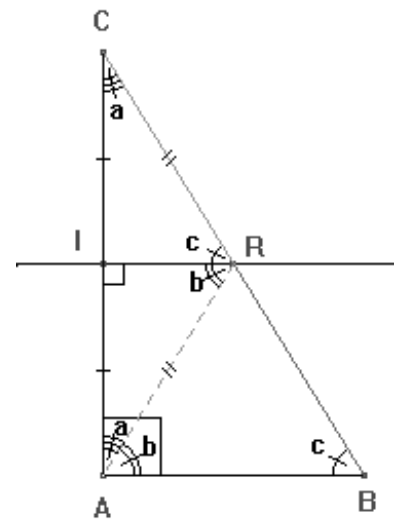
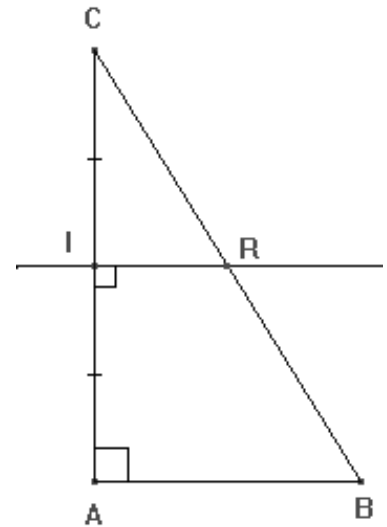
ABC est rectangle en A et I milieu de [CA].

La perpendiculaire au segment [CA] passant par I coupe [CB] en R

Conjectures des élèves:

Peu d'élèves s'autorisent à tracer [RA] : on les y incite.

- (IR) médiatrice de [AC]
 - $(IR) \parallel (AB)$
 - $RA = RC$
 - RAC triangle isocèle en R
 - RAB triangle isocèle en R
 - R milieu de [BC]
 - $\widehat{ACR} = \widehat{CAR}$
 - $\widehat{ABR} = \widehat{IRC}$
 - $\widehat{IRA} = \widehat{RAB}$
 - $\widehat{RAB} = \widehat{RBA}$
- k) R est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



Conjecture a) :

I milieu de [CA]. La perpendiculaire au segment [CA] passant par I coupe [CB] en R .

Donc (IR) médiatrice de [AC]

Conjecture b) :

Les droites (IR) et (AB) sont toutes les deux perpendiculaires à (AC) donc elles sont parallèles entre elles.

Conjecture c) et d) :

Par conséquent R est à égale distance de A et de C, donc $RA = RC$

Donc le triangle RAC est isocèle en R

Conjecture g) :

Ses angles à la base ont même mesure \hat{a} : $\widehat{ACR} = \widehat{CAR} = \hat{a}$

Conjecture h) :

Les droites parallèles (IR) et (AB) , coupées par la sécante (CB), déterminent deux angles correspondants de même mesure : $\widehat{IRC} = \widehat{ABC} = \hat{c}$

Conjecture i) :

Les droites parallèles (IR) et (AB) , coupées par la sécante (AR), déterminent deux angles alternes internes de même mesure : $\widehat{RAB} = \widehat{ARI} = \hat{b}$

Conjecture j) et e) : Il y a deux possibilités pour les démontrer.

$\hat{b} = 90^\circ - \hat{a}$ (AIR rectangle en I) et $\hat{c} = 90^\circ - \hat{a}$ (ICR rectangle en I). Donc $\hat{c} = \hat{b}$;

Le triangle RAB est donc isocèle en R car il possède deux angles de même mesure.

ou bien :

La médiatrice (IR) est axe de symétrie du triangle isocèle CRA donc elle est bissectrice de l'angle au sommet : $\widehat{CRI} = \widehat{IRA}$ donc $\hat{c} = \hat{b}$

Conjecture f) :

D'où $RB = RA$; on a déjà plus haut $RA = RC$; par transitivité on a $RC = RB$;
or R est sur [CB] donc R est le milieu de [BC].

On a donc aussi $RB = RA = RC$.

Donc la conjecture k) est démontrée.

La conclusion de cette démonstration est : « si on trace la médiatrice d'un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle, cette droite passe par le milieu de l'hypoténuse » .

Le milieu de l'hypoténuse est situé à égale distance des trois sommets du triangle. Par conséquent c'est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Les propriétés utilisées :

- Angles et parallèles (*hors socle commun de 5^{ème}*)
- Somme des angles d'un triangle (*socle commun de 5^{ème}*)
- Médiatrice (*socle commun de 5^{ème}*)
- Triangle isocèle : définition et propriétés (*socle commun de 6^{ème} et 5^{ème}*)
- Triangle rectangle, propriétés relatives aux angles (*socle commun de 5^{ème}*)
- Définition du milieu d'un segment (*socle commun de 5^{ème}*)

Progression 2 :

Les étapes 1 et 2 sont un rappel sur le programme de 5^{ème}, l'étape 3 traite du cercle circonscrit au triangle rectangle;

Étape 1 : Étant donnés deux points A et B, combien y a -t-il de cercles passant par A et B ? Où sont situés les centres ?

• Cette étape permet de faire des rappels sur la médiatrice : sa définition et sa propriété caractéristique.

Étape 2 : Étant donnés trois points A, B, C, combien peut-on tracer de cercles passant par ces trois points ?

Cette étape permet de rappeler que :

1°) Par trois points non alignés, il passe un cercle et un seul.

2°) Les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Leur point d'intersection est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Ce rappel peut être plus ou moins développé.

En effet si la question est posée en termes de cercle circonscrit à un triangle, l'élève est incité à énoncer simplement le résultat du cours de 5^{ème}.

En revanche la question: Placer trois points A,B,C. Combien peut-on tracer de cercles passant par ces trois points ? va inciter les élèves à placer eux-mêmes trois points et à essayer de tracer le cercle par tâtonnement ce qui les amènera à dire qu'en général il n'y a pas de cercle (surtout si le triangle qu'ils ont choisi au hasard a un angle obtus). Ils risquent alors de reprendre la recherche qu'ils n'ont peut-être pas eu l'occasion de faire en 5^{ème} en disant que cela « marche » dans certains cas particuliers, selon la nature du triangle ABC.

Mais quelle que soit la question, c'est la gestion de la classe par le professeur qui va inciter les élèves soit à réciter rapidement le résultat du cours de 5^{ème}, soit à retrouver eux-mêmes ce résultat en prenant du temps.

Le professeur peut ensuite prendre le temps de montrer aux élèves avec un logiciel de géométrie dynamique que le centre du cercle est extérieur au triangle quand un des angles est obtus, et qu'il « rentre » dans le triangle quand cet angle diminue et devient aigu.

A un certain moment les élèves peuvent se rendre compte que le centre passe la frontière entre l'intérieur et l'extérieur du triangle. Le professeur n'insiste pas mais l'intérêt est éveillé.

Étape 3 :

**Tracer un triangle rectangle et son cercle circonscrit.
Quelles conjectures peut-on faire ?**

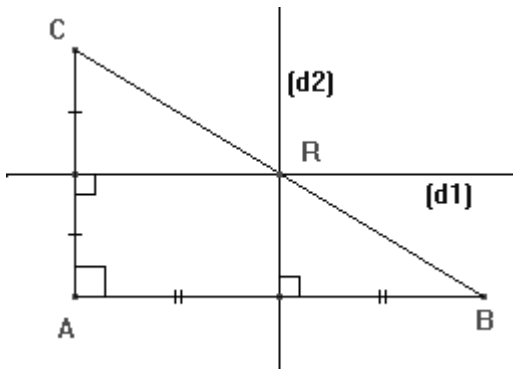
La question est volontairement courte et ouverte. Les élèves savent qu'il suffit de tracer deux médiatrices pour obtenir le centre du cercle.

Nous avons observé deux déroulements lors de nos expérimentations :

Déroulement 1 : Le plus souvent les élèves tracent les médiatrices des côtés de l'angle droit.

Déroulement 2 : Rarement, des élèves proposent de compléter la figure pour obtenir un rectangle.

Déroulement 1 : Les élèves tracent les médiatrices des côtés de l'angle droit.



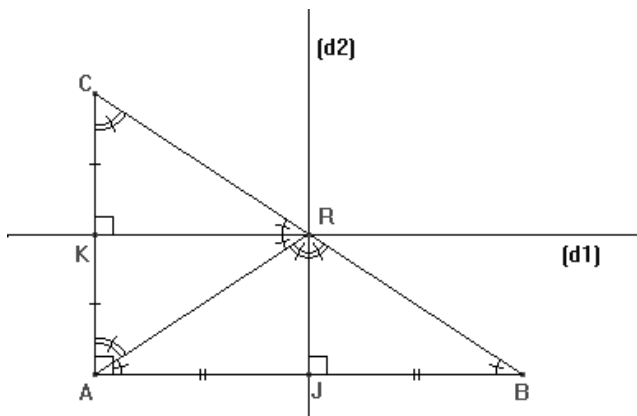
Données :

ABC triangle rectangle en A
 (d₁) médiatrice de [CA]
 (d₂) médiatrice de [AB]
 R point d'intersection de (d₁) et de (d₂).

Conjectures des élèves

Peu d'élèves s'autorisent à tracer [RA], le professeur les y incite.

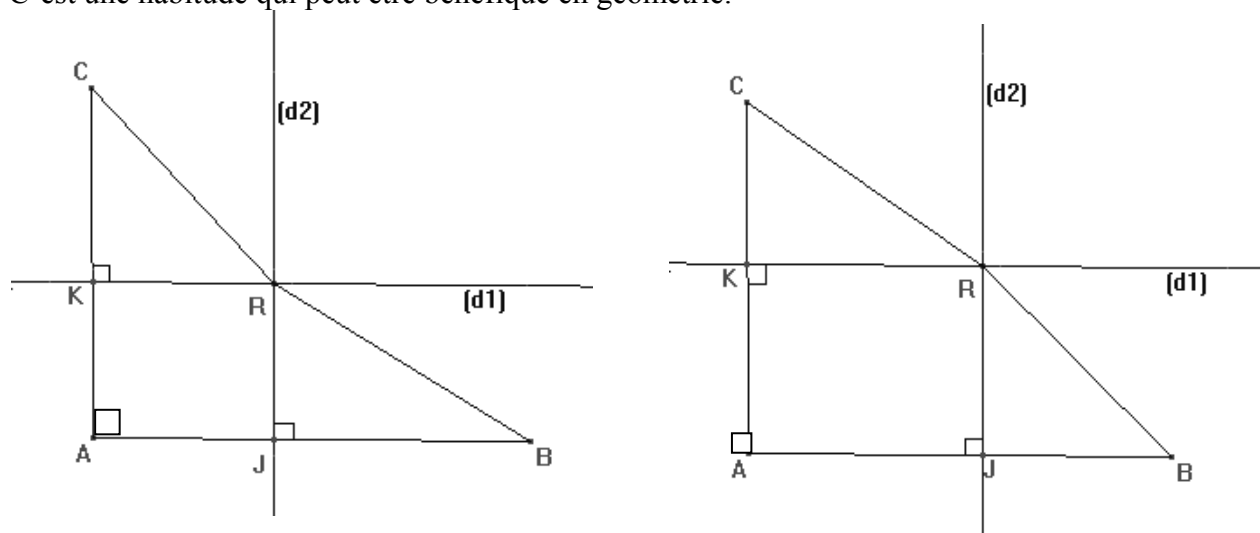
Les conjectures sont éventuellement reformulées par le professeur et écrites au tableau dans l'ordre où les élèves les énoncent :



- a) R est le milieu de [BC]
- b) $RC = RA = RB$
- c) CRA est isocèle en R
- d) $(d_1) \perp (d_2)$
- e) $\widehat{RCA} = \widehat{CAR} = \hat{a}$
- f) $\widehat{RAB} = \widehat{RBA} = \hat{b}$
- g) RAB est isocèle en R
- h) (d_1) est bissectrice de l'angle \widehat{CRA}
 et $\widehat{CRK} = \widehat{KRA}$ ($= \hat{b}$ conjecture h) bis)
- i) (d_2) est bissectrice de l'angle \widehat{ARB}
 et $\widehat{ARJ} = \widehat{JRB}$ ($= \hat{a}$ conjecture i) bis)
- j) $\hat{a} + \hat{b} = 90^\circ$

Démonstrations :

Le professeur fait au tableau une figure « fausse » pour éviter d'admettre l'alignement des points. C'est une habitude qui peut être bénéfique en géométrie.



En commun, sous la direction du professeur, la classe ordonne alors les conjectures en commençant par celles qui peuvent se démontrer facilement.

Il est possible que toutes ces conjectures ne soient pas énoncées par les élèves au cours d'une séance. Le professeur ne complètera pas la liste. Il se contentera de noter celles de ses élèves. Nous donnons ici toutes celles que nous avons recueillies dans l'ensemble de nos classes. Selon la voie choisie, toutes ces conjectures ne sont pas utiles pour démontrer le résultat final: R milieu de [BC]. Si certains de ces résultats n'ont pas été écrits et sont nécessaires à une démonstration, les élèves devront les trouver au cours de la recherche.

Les raisonnements se construisent en commun. Le professeur aide pour les reformuler.

Conjecture d) :

(d₁) médiatrice de [AC], donc (d₁) est perpendiculaire à (AC)

De même (d₂) est perpendiculaire à (AB)

ABC est un triangle rectangle en A

Donc le quadrilatère KRJA qui a trois angles droits est un rectangle. Donc $(d_1) \perp (d_2)$

Conjecture b)

R est sur la médiatrice de [AC] donc $RA = RC$.
 R est aussi sur la médiatrice de [AB] donc $RA = RB$.
 Il en résulte par transitivité que $RC = RB$

Conjectures c), g), e), f) :

$RA = RC$ donc le triangle RCA est isocèle de sommet principal R ; donc ses angles à la base sont de même mesure $\widehat{RCA} = \widehat{CAR} = \hat{a}$

$RA = RB$ donc le triangle RAB est isocèle de sommet principal R ; donc ses angles à la base sont de même mesure $\widehat{RAB} = \widehat{RBA} = \hat{b}$

Conjectures h) et i) :

Dans un triangle isocèle la médiatrice de la base est la bissectrice de l'angle au sommet donc

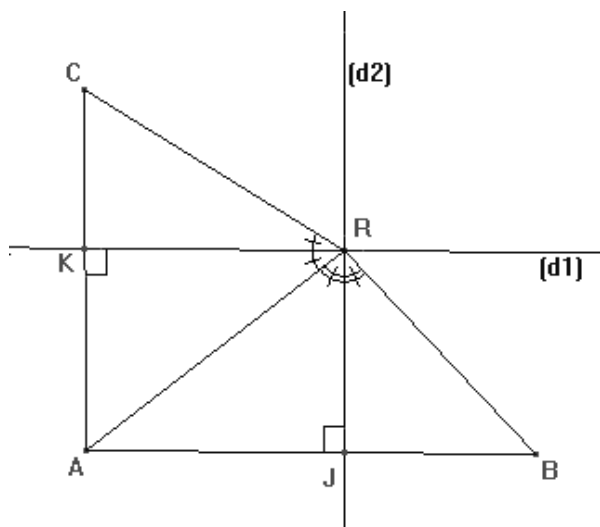
$$\widehat{CRK} = \widehat{KRA} \text{ et } \widehat{ARJ} = \widehat{JRB}$$

Conjecture j) :

Les angles \widehat{CAR} et \widehat{RAB} sont adjacents donc $\widehat{CAB} = \widehat{CAR} + \widehat{RAB} = \hat{a} + \hat{b} = 90^\circ$ puisque le triangle ABC est rectangle en A.

Il reste à démontrer que les points C, R, B sont alignés pour démontrer que R est le milieu de [BC].

Pour démontrer la conjecture a), il y a trois possibilités :



On travaille avec les angles.

Il est préférable de raisonner sur une figure « fausse » pour ne pas se tromper dans les égalités d'angles.

Nos élèves ont trouvé deux démonstrations différentes.

Nous en donnons une troisième qui est valable quelles que soient les deux médiatrices tracées pour obtenir le point R.

Démonstration 1 (trouvée par nos élèves)

Nous avons montré que le quadrilatère AKRJ est un rectangle

donc $\widehat{KRA} + \widehat{ARJ} = \widehat{KRJ} = 90^\circ$. Nous savons aussi que $\widehat{CRK} = \widehat{KRJ}$ et que $\widehat{ARJ} = \widehat{JRB}$

donc $\widehat{CRK} + \widehat{JRB} = 90^\circ$

Les angles \widehat{CRK} , \widehat{KRJ} sont adjacents ainsi que les angles \widehat{KRJ} et \widehat{JRB}

$$\widehat{CRB} = \widehat{CRK} + \widehat{KRJ} + \widehat{JRB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Donc les points C, R, B sont alignés.

Par conséquent, R est le milieu de [CB].

Remarque : Pour cette démonstration il n'est pas nécessaire d'avoir prouvé que

$$\widehat{ARJ} = \widehat{JRB} = \hat{a}$$

ni que $\widehat{CRK} = \widehat{KRA} = \hat{b}$

Démonstration 2 (inspirée par nos élèves)

Les droites parallèles (KC) et (RJ), coupées par la sécante (CR), déterminent les angles alternes-internes

\widehat{KCR} et \widehat{CRy} qui ont donc même mesure.

$$\widehat{CRy} = \widehat{RCA} = \widehat{CAR} = \hat{a}$$

Les droites parallèles (Rx) et (BJ), coupées par la sécante (RB), déterminent les angles alternes-internes \widehat{RBJ} et \widehat{BRx} qui ont donc même mesure.

D'où $\widehat{BRx} = \widehat{RAB} = \widehat{RBA} = \hat{b}$

$$\widehat{xRy} = 90^\circ \quad \text{et} \quad \widehat{CRB} = \widehat{CRy} + \widehat{xRy} + \widehat{xRB} = \hat{a} + \hat{b} + 90^\circ = 180^\circ$$

Donc les points C, R, B sont alignés. Par conséquent, R est le milieu de [CB].

Remarque : Comme dans la démonstration 1, pour conclure il n'est pas nécessaire de savoir que les angles \widehat{ARJ} et \widehat{JRB} sont égaux à \hat{a} et que les angles \widehat{CRK} et \widehat{KRA} sont égaux à \hat{b} .

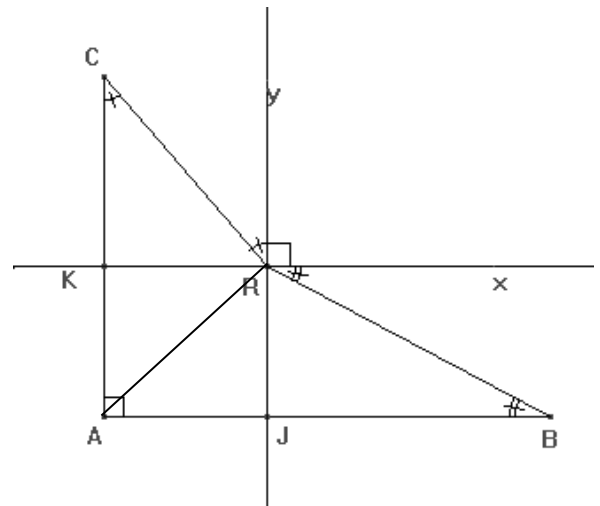
Conjectures h) bis et i) bis :

En raisonnant avec les angles alternes-internes formés par les parallèles (KR) et (AB) coupées par la sécante (AR) certains élèves ont montré que $\widehat{KRA} = \widehat{RAB} = \hat{b}$

D'autres élèves peuvent utiliser les angles complémentaires dans le triangle rectangle KRC.

$$\widehat{CRK} + \widehat{KCR} = \widehat{CRK} + \hat{a} = 90^\circ \quad \text{donc} \quad \widehat{CRK} = 90^\circ - \hat{a} = \hat{b}$$

De même en raisonnant avec les angles alternes-internes formés par les parallèles (AC) et (RJ) coupées par la sécante (AR) ou avec les angles complémentaires dans le triangle rectangle ARJ, on obtient $\widehat{JRA} = \widehat{JRB} = \hat{a}$



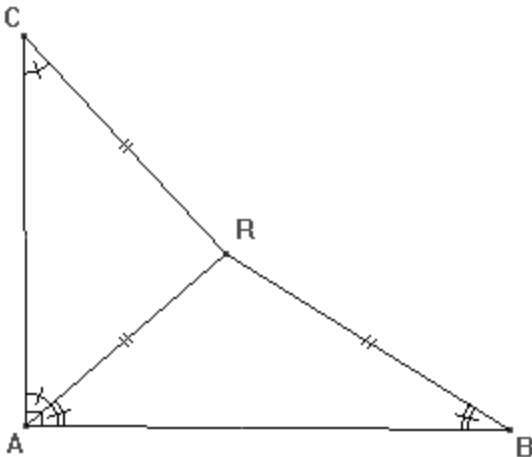
- Construire le cercle circonscrit à un triangle (*soCLE commun de 5^{ème}*)
- Parallèles et perpendiculaires . Il est attendu des élèves qu'ils sachent utiliser cette caractérisation, pour la reconnaissance de deux droites parallèles. (*Commentaire spécifique socle commun de 6^{ème}*)
- Rectangle défini comme quadrilatère ayant trois angles droits. Il est attendu des élèves qu'ils sachent utiliser en situation ces propriétés pour la reconnaissance d'un rectangle. (*Commentaire spécifique socle commun de 5^{ème}*)
- Angles formés par deux parallèles et une sécante (*hors socle commun de 5^{ème}*)
- Somme des angles d'un triangle et angles complémentaires dans le triangle rectangle (*soCLE 5^{ème}*)
- Médiatrice (*soCLE commun de 5^{ème}*)
- Triangle isocèle : définition et propriétés (angles à la base, axe de symétrie) (*soCLE commun de 5^{ème}*)
- Définition du milieu d'un segment (*soCLE commun de 5^{ème}*)

Démonstration 3 (induite par le professeur)

Cette démonstration est valable quelles que soient les deux médiatrices tracées.

Le point R, obtenu par l'intersection de deux médiatrices quelconques du triangle est donc équidistant des sommets du triangle rectangle.

Le professeur incite les élèves à effacer les deux médiatrices qu'ils ont tracées. La démonstration ne met en jeu que les éléments de la figure ci-dessous :



Dans le triangle isocèle CRA

$$\widehat{CRA} = 180^\circ - 2\hat{a}$$

Dans le triangle isocèle ARB

$$\widehat{ARB} = 180^\circ - 2\hat{b}$$

$$\widehat{CRB} = \widehat{CRA} + \widehat{ARB} =$$

$$180^\circ - 2\hat{a} + 180^\circ - 2\hat{b}$$

$$\widehat{CRB} = 180^\circ + 180^\circ - 2(\hat{a} + \hat{b})$$

$$\text{On sait que } \hat{a} + \hat{b} = 90^\circ$$

$$\text{donc } \widehat{CRB} = 180^\circ$$

Les propriétés utilisées par la démonstration 3:

- Somme des angles d'un triangle (*soCLE commun de 5^{ème}*)
- Triangle isocèle : définition et propriétés (*soCLE commun de 6^{ème} et 5^{ème}*)
- Définition du milieu d'un segment (*soCLE commun de 6^{ème}*)
- Calcul littéral Une attention particulière est portée à l'introduction d'une lettre pour désigner un nombre inconnu dans des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par une méthode arithmétique. (*commentaire spécifique du socle commun de 5^{ème}*)

Cette démonstration est très rapide et élégante.

Quand il s'agit de démontrer la réciproque, (si dans un triangle ABC le milieu R de [BC] est équidistant des trois sommets, alors ce triangle est rectangle), certains élèves repensent à cette démonstration et trouvent comment arriver à la conclusion en raisonnant à nouveau sur les deux triangles isocèles et la somme de leurs angles.

Son inconvénient résulte du fait que, quand le professeur l'introduit pour la première fois, elle ne fait pas beaucoup participer les élèves à la recherche. C'est le professeur qui souffle tout le calcul. D'autre part elle réactive moins de connaissances que les deux démonstrations précédentes.

La conclusion de chacune de ces trois démonstrations est :

« **Le centre du cercle circonscrit au triangle rectangle ABC est le milieu de l'hypoténuse** »

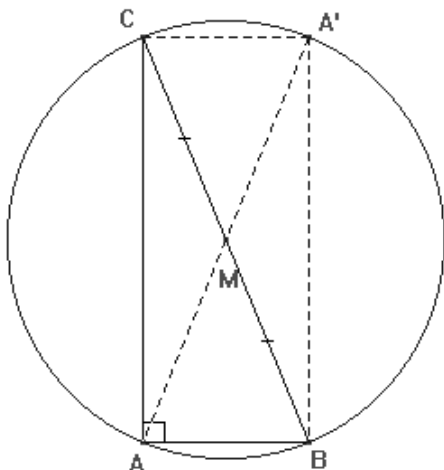
Déroulement 2 : Des élèves proposent de compléter la figure pour obtenir un rectangle :

Le professeur demande : « que faut il rajouter aux données pour obtenir un rectangle ? »

Trois propositions :

- Tracer le symétrique A' du point A par rapport à M.
- Tracer la parallèle à (AC) passant par B et la parallèle à (AB) passant par C. Elles se coupent en A'.
- Tracer la perpendiculaire à (AB) en B et tracer la perpendiculaire à (AC) en C ; elles se coupent en A'.

Si l'on retient la première proposition on a :



Données :

ABC triangle rectangle en A

M est le milieu de [BC]

A' est le symétrique de A par rapport à M.

Conjectures :

a) ACA'B est un rectangle

b) M est le milieu de [AA']

c) $CB = AA'$

d) M est le centre du cercle qui passe par A, C, B, A'

e) $MA = MC = MB = MA'$

Conjecture b) :

A' étant le symétrique de A par rapport à M, M est alors le milieu de [AA'].

Conjecture a) :

M étant aussi le milieu de [BC], on en déduit que les diagonales du quadrilatère ACA'B se coupent en leur milieu. Il en résulte alors que le quadrilatère ACA'B est un parallélogramme.

ABC étant rectangle en A, on en déduit alors que le parallélogramme ACA'B possède un angle droit et que **ACA'B est un rectangle**.

Conjectures c), e) d) :

Les diagonales d'un rectangle ayant même longueur, on a donc $BC = AA'$.

De plus **M** étant le milieu de [BC] et de [AA'], il en résulte que $MA = MC = MB = MA'$.
M est donc situé à égale distance de A, B, C ; il est par conséquent **le centre du cercle circonscrit au triangle ABC**.

Les propriétés utilisées :

- Médiatrice (*socle commun de 5^{ème}*)
- Rectangle : propriétés des diagonales (*socle commun de 5^{ème}*)
- Symétrique par rapport à un point (*socle commun de 5^{ème}*)
- Définition du milieu d'un segment (*socle commun de 6^{ème}*)
- Reconnaître un parallélogramme. (*socle commun de 5^{ème}*)

La conclusion de cette démonstration est : « si un triangle est rectangle, le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des trois sommets ».

Remarque :

Ce déroulement 2 repose sur la propriété de l'égalité des diagonales du rectangle. Or il est possible que ce théorème n'ait jamais été démontré auparavant.

En effet c'est en 6^{ème} que les élèves étudient la symétrie axiale. Avec les propriétés de la médiatrice, les élèves n'ont pas de difficulté avec l'axe de symétrie du triangle isocèle ou les deux axes du losange. Pour le rectangle il en va autrement. En général le professeur de 6^{ème} se contente d'admettre qu'un rectangle a deux axes de symétrie perpendiculaires, résultat que les élèves ont admis depuis l'école élémentaire et qu'il serait sans doute peu motivant et difficile de démontrer à ce niveau ; néanmoins dans une de nos classes de 6^{ème} la question de la justification de cette propriété a été soulevée par un élève². Le professeur disait dans cette classe que dans un rectangle ABCD, la médiatrice du côté [AB] est axe de symétrie du rectangle et un élève a dit : « Mais qui prouve que cette médiatrice de [AB] est aussi médiatrice de [CD] ? ». Si le professeur habitue les élèves à se poser des questions, cette intervention d'élève n'est pas extraordinaire.

Simplement à ce niveau, après avoir admis que le rectangle a deux axes de symétrie, le professeur peut montrer, avec ce qui a été appris sur la symétrie axiale, que les diagonales du rectangle sont égales et se coupent en leur milieu.

En 5^{ème}, les élèves étudient le parallélogramme ainsi que les parallélogrammes particuliers dont le rectangle. En général le professeur met l'accent sur les propriétés suffisantes qu'il démontre, car il s'agit d'un savoir parfois nouveau: pour qu'un parallélogramme soit un rectangle il suffit que ses diagonales soient égales. La démonstration de cette propriété repose encore une fois sur la somme des angles de deux triangles isocèles ayant un côté commun. Quant à la propriété nécessaire il est possible que le professeur de 5^{ème} l'admette en s'appuyant sur ... les connaissances de 6^{ème}.

Or en 5^{ème}, il est très facile de prolonger une ou l'autre des quatre démonstrations que nous venons de voir (celle de la progression 1 ou les trois premières de la progression 2) pour conclure qu'un rectangle a deux axes de symétrie et donc que ses diagonales sont égales et se coupent sur cet axe. L'avantage de la démonstration de la progression 1 ou des démonstrations 1 et 2 de la progression 2

² Collège Cassagnol, Classe de Mme Mauratille, année scolaire 2009-2010.

vient du fait que les élèves ont justement amorcé avec leur figure le début du dessin d'un rectangle et d'un ou de deux axes de symétrie.

Bilan final :

Nous avons choisi de formuler le bilan en envisageant « deux points de vue » ; chaque formulation sera plus opérationnelle que l'autre selon les exercices posés par la suite

1°) Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des trois sommets.

2°) Si un triangle est rectangle, alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

Le professeur pourra alors mettre en place une évaluation sur les propriétés des parallélogrammes, sur les propriétés de la médiatrice, sur les angles, pour permettre aux élèves qui n'avaient pas validé ces compétences de le faire à cette occasion.

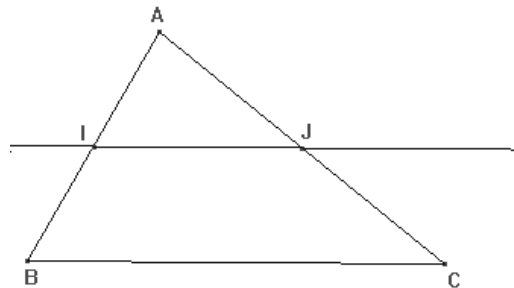
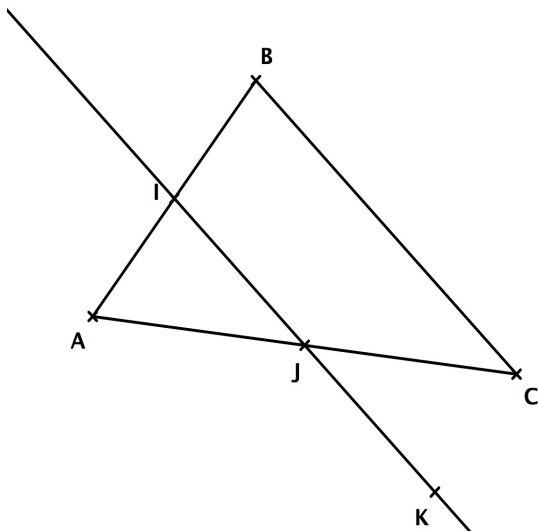
B- LE THÉORÈME DE LA DROITE DES MILIEUX

I- La première propriété des milieux :

On considère un triangle ABC quelconque avec I milieu de [AB] et J milieu de [AC].

On veut démontrer que $(IJ) \parallel (BC)$.

1- Démonstration usuelle



On trace K le symétrique de I par rapport à J
Comme J est le milieu de [AC] et de [IK], IAKC est un parallélogramme.

Donc : $(IA) \parallel (KC)$ et : $IA=KC$
 Comme $KC=IA$ et $IA=IB$, alors $KC=IB$
 $KC=IB$ et $(KC) \parallel (IB)$ donc $KIBC$ est un parallélogramme.
 Donc $(KI) \parallel (BC)$ d'où $(IJ) \parallel (BC)$

Les propriétés utilisées :

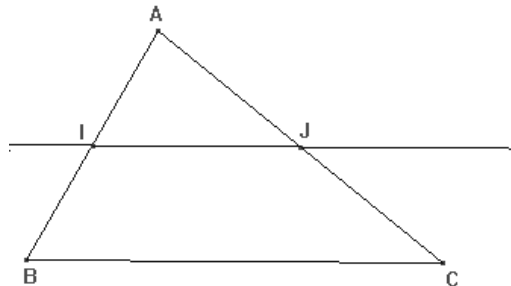
- construire le symétrique d'un point (**Socle Commun de 5e**)
- connaître et utiliser une définition et les propriétés (relatives aux côtés et aux angles) du parallélogramme.
- connaître et utiliser une définition et les propriétés (relatives aux côtés et aux angles) du parallélogramme.

Il est seulement attendu des élèves qu'ils sachent utiliser en situation ces propriétés, notamment pour la reconnaissance d'un parallélogramme. (Commentaires spécifiques pour le socle commun)

Nous préférons utiliser dans nos classes une autre démonstration qui utilise une proposition plus naturelle des élèves .

2- Une autre proposition

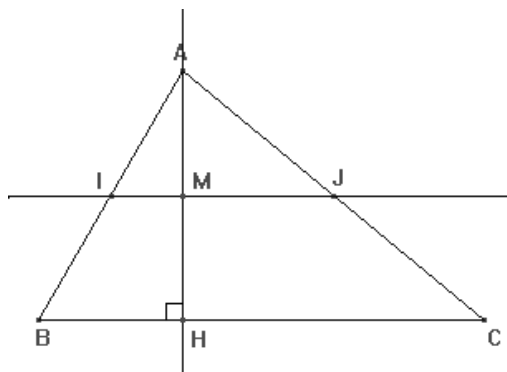
On considère un triangle ABC quelconque avec I milieu de $[AB]$ et J milieu de $[AC]$.



Question aux élèves : Faites des conjectures :

Les élèves conjecturent que $(IJ) \parallel (BC)$.

Le professeur leur demande s'ils ont des idées pour démontrer leur conjecture. Ils pensent à la propriété : Quand deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles et ils suggèrent de tracer la hauteur du triangle issue de A .

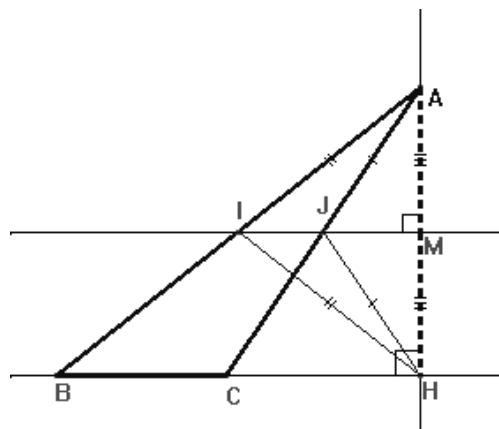


On veut démontrer que $(IJ) \parallel (BC)$:
 On trace la hauteur $[AH]$ issue de A .

On veut prouver que $(IJ) \perp (AH)$

Si la hauteur est à l'extérieur du triangle, la démonstration fonctionne de la même façon.

Cette démonstration n'est possible que si les élèves ont déjà vu le centre du cercle circonscrit au triangle rectangle. Cela amène les élèves à réutiliser une propriété déjà étudiée au cours de l'année dans un chapitre précédent. L'utilité des propriétés du cours pour avancer plus loin dans les connaissances est ainsi soulignée, les notions étudiées dans le programme prennent du sens par les liens qu'elles ont entre elles.

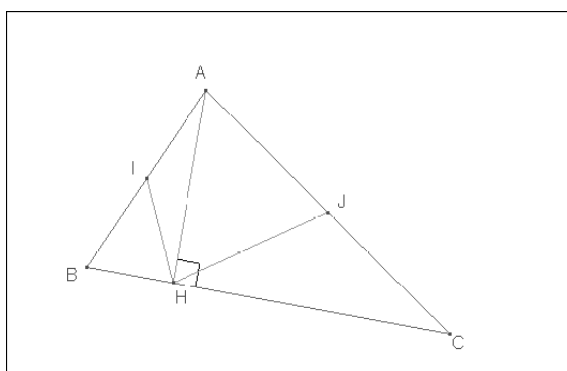


Un autre avantage de cette démonstration est qu'il n'est pas utile d'introduire ce point K, ressenti comme un artifice par les élèves .

Les conjectures des élèves :

- Les triangles ABH, ACH sont rectangles en H (C'est une simple reformulation des données)
- Les triangles AIM, AMJ sont rectangles en M
- M est le milieu de [AH]
- (IJ) est la médiatrice de [AH]

Le professeur incite les élèves à tracer [IH] et [JH].
Ils poursuivent leurs conjectures



- Les triangles BIH, AIH, AJH, CJH sont isocèles.
Certains élèves pensent que le triangle BIH est équilatéral, mais d'autres les contredisent car ce n'est pas vrai sur leur figure : cette conjecture, qui ne marche pas pour tous les dessins est rejetée par la classe.
- $IH = IB = IA$ et $JH = AJ = JC$

Démonstration :

Conjecture a) :

(AH) est la hauteur du triangle ABC issue de A donc $(AH) \perp (BC)$. Les triangles ABH et ACH sont des triangles rectangles.

Conjecture f) :

Certains élèves pensent au cercle circonscrit au triangle rectangle, ils disent : Si on traçait le cercle circonscrit au triangle ABH rectangle en H, son centre serait le milieu de son hypoténuse. I est le milieu de [AB], le cercle circonscrit passant par les trois points A, B, H, on a $IB = IA = IH$

De même $HJ = AJ = JB$.

Conjecture d) :

Avec l'aide du professeur pour sélectionner les bonnes égalités de longueur, on en déduit que I et J sont tous les deux équidistants de A et H d'où, (IJ) est la médiatrice de [AH].

Donc (IJ) est perpendiculaire à (AH).

Or si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles, donc $(IJ) \parallel (BC)$.

Les propriétés utilisées :

- Connaître et utiliser la définition d'une hauteur d'un triangle. **(Hors Socle Commun)**
 - Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit. **(Hors Socle Commun)**
 - Connaître et utiliser la caractérisation des points de la médiatrice par la propriété d'équidistance **(Socle Commun de 5e)**
 - Connaître et utiliser la définition de la médiatrice **(Socle Commun de 5e)**
 - Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles
- Il est seulement attendu des élèves qu'ils sachent utiliser en situation cette caractérisation, notamment pour la reconnaissance de deux droites parallèles (...) (commentaires spécifiques pour le socle)*

Remarque pour le professeur : Certaines conjectures, par exemple les conjectures b) ou c) ne servent pas à l'enchaînement des raisonnements conduisant à la propriété du cours que l'on veut démontrer. Cependant le professeur n'intervient pas quand les élèves les proposent. Elles seront démontrées comme conséquence des autres conjectures dans un deuxième temps.

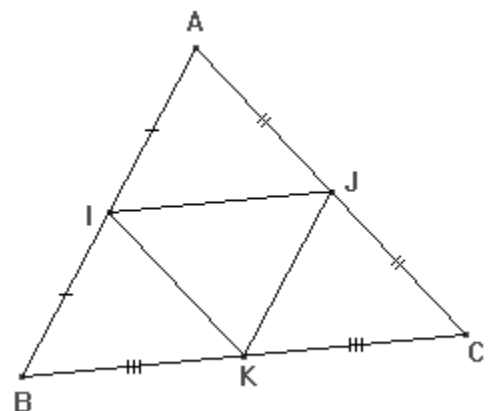
II- La deuxième propriété des milieux :

Dans un triangle ABC, on veut prouver que le segment qui joint les milieux de deux côtés du triangle a pour longueur la moitié du troisième côté.

Le professeur propose aux élèves de tracer un triangle quelconque, placer les points I, J et K, milieux de [AB], [AC] et [BC].

Conjectures des élèves :

- Les 4 triangles AIJ, IBK, IJK, JKC sont « identiques ». *(Certains élèves n'en sont pas sûrs car les triangles n'ont pas la même position)*
- Les quadrilatères AIKJ, BIJK, IJCK sont des parallélogrammes



Et parfois :

- Les quadrilatères IJCB, AJKB, IACK sont des trapèzes.
ce qui se traduit par
- $(IJ) \parallel (BC)$; $(IK) \parallel (AC)$; $(JK) \parallel (AB)$

Démonstration :

Conjecture d) et c):

On utilise la propriété précédente : Dans le triangle ABC, I est le milieu du côté [AB] et J est le milieu du côté [AC], donc la droite (IJ) qui joint les deux milieux est parallèle au troisième côté (BC). Le quadrilatère IJCB a deux côtés parallèles donc c'est un trapèze.

De même pour $(IK) \parallel (AC)$ et $(JK) \parallel (AB)$.

Conjecture b) :

$(IJ) \parallel (BC)$ donc $(IJ) \parallel (BK)$ et $(JK) \parallel (AB)$ donc $(JK) \parallel (IB)$ Les côtés opposés du quadrilatère IJKB sont parallèles donc c'est un parallélogramme.

De même pour AIKJ et IJCK.

Conjecture a) :

BIJK est un parallélogramme donc ses côtés opposés ont la même longueur : $BI = JK$ et $BK = IJ$

De même avec IJCK : $IJ = CK$ et $IK = JC$

De même avec AIKJ : $IK = AJ$ et $JK = AI$

On en déduit que les triangles AIJ, IBK, IJK, JKC ont leurs trois côtés de même longueur donc ils sont identiques.

On peut de plus rajouter la conclusion suivante : le triangle IJK a des côtés dont les dimensions sont la moitié de celles du triangle ABC et en particulier IJ a pour longueur la moitié de BC.

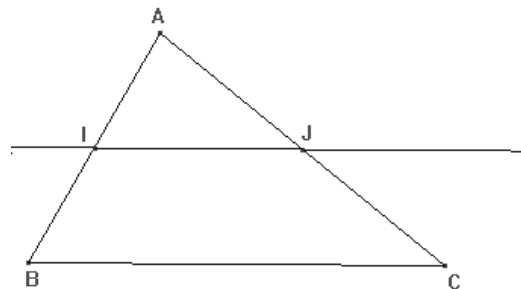
III- La troisième propriété des milieux :

Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté, coupe le troisième côté en son milieu.

On sait que :

- I est le milieu de [AB]
- $(IJ) \parallel (BC)$

On veut prouver que J est le milieu de [AC]



Démonstration usuelle : Pour démontrer cette propriété, il est possible d'appeler J' le milieu de [AC] et de démontrer grâce à la propriété 1 et l'axiome d'Euclide que les points J et J' sont confondus : par I, il passe deux parallèles à (BC).

Cette démonstration est très simple et rapide, mais les élèves ne comprennent pas toujours très bien l'introduction des deux points J et J' . Le professeur est à nouveau amené à faire une figure fautive pour l'expliquer.

D'autre part, l'axiome d'Euclide, bien sûr connu des élèves, n'est souvent pas considéré comme une « vraie » propriété, utilisable dans une démonstration. De plus, peut-être parce que cela paraît trop évident, il est rarement formulé par écrit dans le cours.

Enfin le fait qu'on démontre si simplement la propriété 3 en utilisant la 1 renforce la confusion que font les élèves entre les deux propriétés.

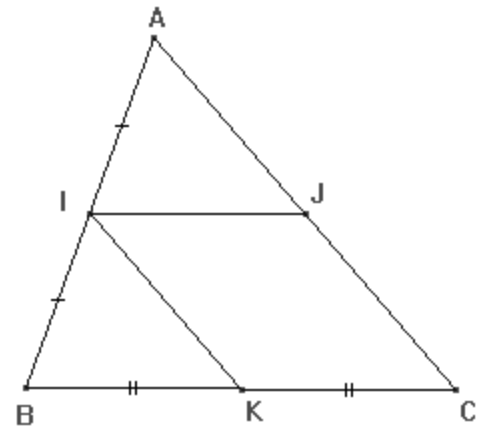
Autre proposition :

La proposition suivante offre l'avantage d'utiliser des propriétés bien connues des élèves et permet donc au professeur de les laisser conduire la démonstration.

On propose aux élèves de rajouter sur la figure initiale le milieu K du côté $[BC]$.

Les élèves voient tout de suite le parallélogramme IJK .
 $(IJ) \parallel (BC)$ donc $(IJ) \parallel (KC)$
 et I et K sont les milieux des deux côtés $[AB]$ et $[BC]$

donc la droite (IK) est parallèle à (AC) donc à (JC) . Les côtés opposés du quadrilatère $IJKC$ sont parallèles, donc c'est un parallélogramme.



Les élèves veulent tracer le segment $[JK]$ et prouver que $IJKB$ est un parallélogramme, comme ils l'ont fait pour la propriété précédente. Ils s'aperçoivent que ce n'est pas possible car on ne sait pas que J est le milieu de $[AC]$.

On revient à la figure précédente : $IJKC$ étant un parallélogramme, $IJ = CK$ et $IK = JC$.

D'autre part, K et I sont les milieux des deux côtés $[BC]$ et $[AB]$, le segment $[IK]$ a pour longueur la moitié de AC .

Conclusion : $IK = JC = AC \div 2$ donc J est le milieu de $[AC]$.

Cette dernière propriété ne figure pas dans le socle commun, cependant la démonstration gérée ainsi, permet aux élèves de réutiliser les deux propriétés précédentes et de réactiver les connaissances sur les parallélogrammes.

Les propriétés utilisées :

-
- propriétés du parallélogramme (*socle commun de 5^{ème}*)
- propriété de la médiatrice (*socle commun de 5^{ème}*)
- parallèles et perpendiculaires (*socle commun de 6^{ème}*)
- cercle circonscrit au triangle rectangle (*hors socle commun de 4^{ème}*)
- hauteur d'un triangle (*hors socle commun de 5^{ème}*)
- détermination d'un triangle par la longueur de ses trois côtés (*socle commun de 6^{ème} : il est seulement attendu des élèves qu'ils sachent utiliser en situation ces propriétés pour reconnaître des triangles*)

Remarque : La troisième propriété est une réciproque de la première puisqu'on échange une partie des données et la conclusion, cependant le professeur ne l'annonce pas ainsi aux élèves, pour deux raisons :

- parce qu'il n'y a pas d'usage établi pour désigner un de ces théorèmes comme direct et l'autre comme réciproque (comme pour le théorème de Thalès par exemple)
- parce que les élèves inventent parfois une quatrième propriété, qui est fautive (voir figure ci dessous), mais qu'ils « justifient » en disant qu'il y a nécessairement une autre réciproque, pour la propriété 2.

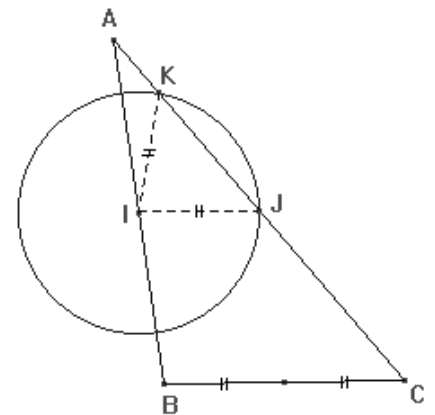
C'est la suivante :

Données : I milieu de [AB] et J est un point de [AC] tel que $IJ = \frac{BC}{2}$

Conclusion : J est milieu de [AC] et (IJ) // (BC)

Ne pas prononcer le mot de réciproque n'empêchera peut-être pas l'erreur, mais du moins on pourra dire qu'il y a trois propriétés vraies (sur le même plan) et une fautive.

Il faudra cependant souligner le changement de rôle des propositions « J est le milieu de [AC] » et « (IJ)//(BC) » entre la propriété 1 et la 3, pour que les élèves les différencient. En effet, ils ont tendance à les confondre.



Conclusion :

Dans cet enchaînement de situations , tous les élèves travaillent des connaissances et des compétences mathématiques en géométrie :

- connaître et représenter des figures géométriques ;
- utiliser leurs propriétés.

Cette façon de gérer la classe favorise les échanges entre élèves qui défendent leur point de vue, développent leurs arguments, les exposent clairement pour se faire comprendre du groupe et pas seulement du professeur. La mise en commun des formulations proposées par différents élèves, tant à l'oral qu'à l'écrit, aide à la difficile mise en forme de la démonstration.

Par la façon dont toutes ces situations sont gérées en classe, les élèves travaillent aussi des compétences plus générales, de l'ordre de la pratique scientifique :

- Rechercher, extraire et organiser l'information utile ;
- Raisonner, argumenter, démontrer ;
- Présenter la démarche suivie, les résultats obtenus, communiquer à l'aide d'un langage adapté.

A plus long terme, ces situations contribuent aussi à leur donner :

- Le respect de la vérité rationnellement établie ;
- Le goût du raisonnement fondé sur des arguments dont la validité est à prouver.